REVISTA ELETRÔNICA AMPLAMENTE
v.1, n.2 abr./ jun. 2022 DOI: 10.47538/RA-2022.V1N2
ISSN: 2965-0003

OS TEOREMAS DE INCOMPLETUDE DE GÖDEL E A CONJECTURA DE GOLDBACH

Carlos Daniel Chaves Paiva
Licenciando em Matemática, Instituto Federal do Ceará.
http://lattes.cnpq.br/7786024451364957
E-mail: carlos.daniel.chaves06@aluno.ifce.edu.br

Francisco Odécio Sales
Doutorando em Educação (Ensino de Matemática) - PPGE/UFC. Bacharel, Licenciado, Especialista e Mestre em Matemática. Professor EBTT - Instituto Federal do Ceará (IFCE) Campus Itapipoca.
https://orcid.org/0000-0002-2873-049X
http://lattes.cnpq.br/5358752623192820
E-mail: odecio.sales@ifce.edu.br

DOI-Geral: http://dx.doi.org/10.47538/RA-2022.V1N2
DOI-Individual: http://dx.doi.org/10.47538/RA-2022.V1N2-05

RESUMO: O objetivo desta pesquisa é utilizar os teoremas de incompletude para tratar sobre um problema em aberto na Matemática. Esta pesquisa é uma revisão bibliográfica, Foi feito então inicialmente um levantamento teórico de livros, artigos, dissertações e teses que versem sobre os tópicos. Em seguida, fizemos um apanhado histórico, no qual foram estudados as biografias das personalidades envolvidas e o contexto matemático em que surgem a conjectura e os teoremas. Acreditamos veementemente que este trabalho forneça uma ótima base para outros estudiosos que futuramente possam se interessar pelos assuntos aqui tratados e que estejam decididos a estudá-los com mais robustez. Sugerimos, após a apropriação desses conceitos básicos, o estudo de teoremas já indecidíveis na Aritmética de Peano, a fim de entender como se dá a construção de provas nesse contexto e dessa forma, quem sabe, fazerem observações que possam vir a ser úteis.

PALAVRAS-CHAVE: Gödel. Conjectura de Goldbach. Revisão bibliográfica.

GÖDEL'S INCOMPLETE THEOREMS AND THE GOLDBACH CONJECTURE

ABSTRACT: The objective of this research is to use incompleteness theorems to deal with an open problem in Mathematics. This research is a bibliographic review. Initially, a theoretical survey of books, articles, dissertations and theses that deal with the topics was carried out. Then, we made a historical overview, in which the biographies of the personalities involved and the mathematical context in which the conjecture and theorems appear were studied. We strongly believe that this work provides an excellent basis for other scholars who may be interested in the subjects discussed here in the future and who are determined to study them more robustly. We suggest, after appropriating these basic concepts, the study of already undecidable theorems in Peano Arithmetic, in order to understand how the construction of proofs takes place in this context and in this way, who knows, making observations that may prove to be useful.

KEYWORDS: Gödel. Goldbach Conjecture. Literature review.

A partir do final do século XIX, os matemáticos lógicos apresentaram um crescente interesse em “verificar os fundamentos da matemática e reconstruir tudo usando os princípios fundamentais, de modo a garantir que tais princípios fossem confiáveis.” (SINGH, 2014). Dessa forma, esperava-se reduzir — ou até mesmo eliminar — as contradições matemáticas.

O desejo dos matemáticos em realizarem tal empreitada aumentou com a realização do Segundo Congresso Internacional de Matemática em 8 de agosto de 1900, em Paris, no qual o prestigiado matemático alemão David Hilbert (1862-1943) propôs 23 problemas que, como nos conta Singh (2014), “deveriam focalizar a atenção do mundo matemático e fornecer um programa de pesquisas. Hilbert queria unir a comunidade para ajudá-lo a realizar sua visão de um sistema matemático livre de dúvidas ou inconsistências”. Nas duas décadas seguintes, os matemáticos trabalharam arduamente para que essa matemática livre de contradições se tornasse realidade.

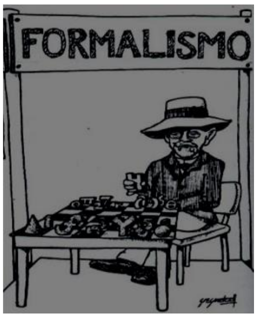

Figura 1: O Formalismo de David Hilbert: a tarefa era formalizar toda a Matemática Clássica.

Figura 2: David Hilbert.

Dentre os 23 problemas propostos por Hilbert, o segundo — que se resolvido forneceria a segurança necessária para a realização completa e satisfatória do seu programa, “teve importância capital no processo em que se deu a da prova da incompletude de Gödel, dado que ele foi o ponto que atingiu o programa de Hilbert”, omo explica Batistela (2017). O problema pede para provar a consistência dos axiomas da

Aritmética, ou seja, que os resultados obtidos com um número finito de passos lógicos baseados nesses axiomas nunca seriam contraditórios.

Na década de 1930, apesar de tudo, Hilbert se sentia bastante confiante de que o seu sonho de uma lógica completa e consistente estava próximo de ser real. No entanto, em 1931, com a publicação do trabalho *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* (Sobre as proposições indecidíveis no Principia Mathematica e sistemas relacionados), um jovem matemático austríaco de 25 anos, até então desconhecido no meio lógico, chega a uma surpreendente conclusão: independente do conjunto de axiomas que esteja sendo usado, existem problemas que os matemáticos não podem resolver e, pior ainda, os matemáticos nunca poderão ter certeza de que sua escolha de axiomas não os levará a contradições.

Figura 3: Kurt Gödel.

Kurt Gödel (1906-1978), portanto, tinha provado que era impossível criar um sistema matemático completo e consistente e, assim, destruindo para sempre as esperanças de Hilbert e forçando os matemáticos a aceitarem que sua ciência jamais poderá ser logicamente perfeita. Dessa forma, o trabalho de Gödel nos desperta várias reflexões, e a mais interessante talvez seja a hipótese de os matemáticos estarem presos a problemas que para os quais a possibilidade de inexistência de uma prova deva ser realmente considerada.

Nesse sentido, o objetivo desta pesquisa é utilizar os teoremas de incompletude para tratar sobre um problema em aberto na Matemática, a conjectura proposta pelo matemático prussiano Christian Goldbach (1690-1764) (a qual afirma que todo número par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos, iguais ou não), conjectura esta que tem, há aproximadamente 280 anos, amedrontado os matemáticos em todo o mundo. Esperamos, com isso, estimular o leitor (alunos de graduação, professores e afins) a buscar um aprofundamento em assuntos relacionados à Filosofia Matemática, sobretudo os teoremas de incompletude, bem como suas implicações em problemas (abertos ou não) na Matemática; compreender possíveis implicações desses tópicos para a construção do conhecimento matemático do leitor também é um objetivo deste trabalho.

Esta pesquisa é uma revisão bibliográfica, que por sua vez, segundo Lakatos, Marconi (1991, p. 43-44), "trata-se de levantamento de toda a bibliografia já publicada, em forma de livros, revistas, publicações avulsas e imprensa escrita." "Sua finalidade é colocar o pesquisador em contato direto com tudo aquilo que foi escrito sobre determinado assunto, com o objetivo de permitir ao cientista 'o reforço paralelo na análise de suas pesquisas ou manipulação de suas informações" (TRUJILLO, 1974, p. 230 apud LAKATOS, MARCONI, 1991, p. 44). Assim, "a bibliografia pertinente oferece meios para definir, resolver, não problemas somente já conhecidos, como também explorar novas áreas, onde os problemas ainda não se cristalizaram suficientemente" (MANZO, 1971, p. 32 apud LAKATOS, MARCONI, 1991, p. 44).

Foi feito então inicialmente um levantamento teórico de livros, artigos, dissertações e teses que versem sobre os tópicos. Em seguida, fizemos um apanhado histórico, no qual foram estudados as biografias das personalidades envolvidas e o contexto matemático em que surgem a conjectura e os teoremas. Posteriormente, foi feito um estudo dos teoremas de incompletude de Gödel, focando no cerne de sua demonstração e na sua aplicabilidade, seguido pelo estudo dos principais resultados alcançados até o momento no que concerne à prova da conjectura de Goldbach. O próximo passo é analisar pelo menos dois teoremas já provados indecidíveis na Aritmética de Peano, a fim de entendermos alguns dos elementos gödelianos presentes em tais provas[1]. Finalmente, buscamos discutir (matematicamente e filosoficamente) os pontos que inevitavelmente surgem durante o estudo de tais temáticas e que são necessários para se chegar a algum tipo de conclusão.

Por mais que a incompletude de Gödel tenha sido um dos resultados mais importantes alcançados na Matemática durante o século XX, grande parte da comunidade matemática ainda os negligencia. Isso se dá, principalmente, pelo fato de que o

1É importante deixar claro que o objetivo ao estudarmos tais teoremas não é visando adquirir fundamentação para elaborarmos qualquer tipo de prova. É tão somente compreender como que se dão nesse ambiente, o qual é ainda muito desconhecido.

matemático deseja que suas teorias não apresentem qualquer tipo de inconsistência e que, além disso, suas conjecturas sejam provadas ou, pelo menos, refutadas. Como podemos ver, a partir da teoria de Gödel, os matemáticos têm sim, a princípio, motivos para terem receios de que seus objetivos sejam inalcançáveis. Outro ponto que gera essa indiferença é que os teoremas já provados indecidíveis são desconhecidos, inclusive pela própria comunidade matemática.

Ainda assim, consideramos a realização de um trabalho com esta temática importante por conta principalmente dos seguintes pontos: o primeiro, é o fato de que existe, pelo menos na nossa literatura, poucos trabalhos sobre tais assuntos; depois, porque são temas, especialmente os teoremas de Gödel, que levantam muitos questionamentos em quem busca entendê-los, o que finda gerando muitas vezes, infelizmente, interpretações e conclusões completamente equivocadas e, por último, porque é algo, no caso da incompletude, que se estende a outras áreas do conhecimento. Além disso, a conjectura proposta por Goldbach, muito embora já seja bastante conhecida, ainda recebe um tratamento matemático bastante limitado. Isto é, os matemáticos, por saberem que ela continua em aberto (o que gera um certo sentimento de incapacidade), simplesmente não se interessam em estudá-la destacadamente. Outros, de uma maneira bastante questionável, optam por afirmar que o alcance de sua prova teria pouco impacto sobre a Matemática que conhecemos.

Kurt Gödel, de uma maneira geral, teve uma vida bem conturbada: logo aos 6 anos teve uma febre reumática. Ao pesquisar sobre tal enfermidade, descobriu que ela poderia deixar sequelas cardíacas graves, que poderiam durar por toda a vida. Ainda que não existam evidências de que Gödel tenha apresentado de fato problemas cardíacos, ele estava convencido disso e assim a sua saúde passou a ser uma preocupação constante para ele. Em 1934, quando voltava para a Europa após uma série de palestras no Instituto de Estudos Avançados de Princeton, Gödel sofreu um colapso nervoso, o que o levou a passar vários meses em um sanatório se recuperando. Já recuperado, sofre outro colapso ao tomar conhecimento de que o filósofo e físico alemão Moritz Schlick (1882-1936), do qual era bastante amigo, é assassinado por um estudante nazista. No final de sua vida, Gödel se convenceu de que estava sendo envenenado e, recusando-se a comer para evitar isso, praticamente acabou morrendo de fome. Apesar de tudo, o que se observa é que

Gödel sempre foi matematicamente bastante produtivo, já que produziu diversas obras. Gödel, a título de curiosidade, era amigo íntimo do físico alemão Albert Einstein (1879-1955).

Algumas definições são imprescindíveis para que se compreenda com mais precisão o que nos diz os teoremas de incompletude. Portanto, elencamos abaixo aquelas que aparecem mais frequentemente:

Definição 1: *(Fórmulas bem formadas)* São sentenças que obedecem a certas regras de construções (axiomas, postulados ou proposições básicas).

Definição 2: *(Axiomas)* São um subconjunto do conjunto de fórmulas bem formadas.

Definição 3: *(Regras de inferência)* São regras que nos permite construir novas fórmulas a partir de fórmulas já existentes.

Definição 4: *(Sistema formal)* Um sistema formal S é um sistema constituído por um número finito ou não de axiomas (expressos em alguma linguagem formal definida) e uma lista de regras de inferência que serão utilizados para obter os teoremas daquele sistema.

Definição 5: *(Prova formal)* Uma prova em S é uma sequência finita de fórmulas $\beta 1$, $\beta 2$, $\beta 3$, ... , βn, em que cada βi ou pode ser adquirido através de fórmulas anteriores obtidas através de regras de inferência ou é um axioma.

Definição 6: *(Teorema)* Um teorema em S é uma fórmula α para a qual existe uma prova em S em que α é a última fórmula desta prova.

Definição 7: *(Completude)* Dizemos que um sistema formal S é completo se, dada uma proposição A em S, existir uma prova para ela ou para sua negação, ou seja, A é teorema ou $\neg$A é teorema.

Definição 8: *(Consistência)* Dada uma proposição A, dizemos que o sistema é consistente se nele não for possível provar A e sua negação, isto é, A e $\neg$A não podem simultaneamente serem teoremas.

Definição 9: *(Uma certa quantidade de Aritmética elementar)* É qualquer sistema no qual exista a linguagem da Aritmética elementar, ou seja, em que cujos teoremas apresentam alguns fatos básicos sobre a natureza dos números, como as operações entre eles.

Definição 10: *(Aritmética de Peano)* Propostos pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) no final do século XIX em seu trabalho *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, os Axiomas de Peano são um conjunto de axiomas que determinam toda a teoria da Aritmética. "Formalmente, a Aritmética de Peano é uma teoria axiomática baseada em lógica de primeira ordem, cujos indivíduos (e interações entre indivíduos) devem ser interpretados como números naturais." (MAROCHI, 2021, p. 46). No que concerne especificamente à álgebra dos números naturais, compreende os seguintes axiomas:

1. Zero é um número;

2. O sucessor imediato de um número é um número;

3. Zero não é sucessor imediato de um número;

4. Não há dois números que tenham o mesmo sucessor imediato;

5. Qualquer propriedade pertencente a zero, e também ao sucessor imediato de cada número que tenha a propriedade, pertence a todos os números.

Durante muito tempo, como é dito por Neto (2007, p. 12), acreditou-se que a Aritmética de Peano continha todas as verdades acerca dos números naturais e conjuntos finitos.

A par de tais definições podemos enunciar os teoremas de Gödel:

(Primeiro teorema de incompletude): *Qualquer sistema formal consistente S dentro do qual uma certa quantidade de Aritmética elementar possa ser realizada é incompleto.*

(Segundo teorema de incompletude): *Para algum sistema formal consistente S dentro do qual uma certa quantidade de Aritmética elementar possa ser realizada, a consistência de S não pode ser provada por meio de S.*

Em outras palavras, os teoremas acima nos dizem que todo sistema formal consistente é incompleto e que todo sistema formal completo é inconsistente. Ou seja, completude e consistência não podem ser então simultaneamente alcançadas.

REVISTA ELETRÔNICA AMPLAMENTE
v.1, n.2 abr./ jun. 2022 DOI: 10.47538/RA-2022.V1N2
ISSN: 2965-0003

Provar rigorosamente tais teoremas, como bem nos diz Nagel e Newmann (2009, p. 63), é uma tarefa árdua: “O artigo de Gödel é difícil. É preciso assenhorar-se de 46 definições prévias juntamente com vários importantes teoremas preliminares, antes de alcançar os resultados principais.” No entanto, a prova destes resultados gira em torno do Número de Gödel, que consiste em uma função que transforma cada símbolo, fórmula e prova de uma linguagem formal em um número natural n, em que n é igual ao produto das potências de uma determinada quantidade de números primos.

Infelizmente, os teoremas de incompletude ainda são muito utilizados como argumento para se chegar a conclusões absurdas, tais como: “não existe uma realidade objetiva, isto é, o mundo que vemos não existe”; “nada pode ser conhecido por inteiro” e “é impossível construir uma Teoria de Tudo na Física”. Teorias como estas são completamente errôneas porque ignoram as condições de um sistema para que os teoremas sejam aplicáveis: o sistema deve ser formal, consistente, recursivamente axiomático e capaz de expressar a Aritmética básica. Como exemplos para tais sistemas podemos citar a Aritmética de Peano, a Aritmética de Robinson, criada pelo matemático americano Raphael Mitchel Robinson (1911-1995), os Axiomas de Zermelo-Fraenkel[2] e o próprio *Principia Mathematica*, sob o qual Gödel desenvolveu seu artigo.

Inteirados dos principais conceitos relacionados à incompletude, trataremos agora acerca da conjectura de Goldbach.

Christian Goldbach, que nasceu na famosa cidade de Königsberg, era filho de um pastor da igreja protestante e, pelo incrível que pareça, estudou sobretudo Direito e Medicina, já que tinha a Matemática mais como um hobby.

[2]Idealizado pelos matemáticos alemães Ernst Zermelo (1871-1953) e Abraham Fraenkel (1891-1965), é um sistema axiomático que foi proposto com o objetivo de construir uma teoria dos conjuntos sem os paradoxos da teoria ingênua dos conjuntos.

Figura 4: Christian Goldbach.

Em 1710, aos vinte anos, iniciou uma das várias viagens pela Europa, estabelecendo contato com muitos dos principais cientistas da época. Durante essa viagem, em 1711, conheceu o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), na cidade de Leipzig. Durante os dois anos seguintes, os dois trocaram correspondência em latim. Em 1712, em Londres, Goldbach encontrou-se com o matemático francês De Moivre (1667-1754) e com o suíço Nicolaus (I) Bernoulli (1687-1759) que, tal como Goldbach, também viajava pela Europa.

Goldbach continuou a sua longa viagem e esteve em Veneza em 1721. Aqui ele conheceu Nicolaus (II) Bernoulli (1695-1726), que também estava em viagem pela Europa. Foi por sugestão de Nicolaus que Goldbach iniciou em 1723 uma correspondência, que durou sete anos, com Daniel Bernoulli (1700-1782), o irmão mais novo de Nicolaus.

Por volta de 1730, conhece aquele que é um dos maiores matemáticos de todos os tempos e com o qual trocaria cartas pelos 35 anos seguintes: o suíço Leonhard Euler (1707-1783). Dessa correspondência, 196 cartas sobreviveram. Muitas destas cartas tratavam de variados problemas de Teoria dos Números, alguns deles apresentados anteriormente por Pierre de Fermat (1607-1665). A extensa correspondência entre Goldbach e Euler é uma fonte de informação sobre a história da Matemática no século XVIII, pois fornece um registo fundamental do legado de Euler na Teoria dos Números, mais até do que as próprias publicações de Euler. Goldbach, mesmo olhando para a Matemática como uma atividade lúdica, desenvolveu um trabalho importante na Teoria dos Números.

Em uma dessas cartas, mais especificamente na de 7 de junho 1742, o matemático prussiano sugere a conjectura que até hoje intriga a comunidade matemática:

(Conjectura de Goldbach): *Todo número par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos.*

REVISTA ELETRÔNICA AMPLAMENTE
v.1, n.2 abr./ jun. 2022 DOI: 10.47538/RA-2022.V1N2
ISSN: 2965-0003

Euler, em resposta, comenta que a conjectura parece ser verdadeira mas que naquele momento seria incapaz de prová-la. Propõe, todavia, que está conjectura poderia ser decomposta em duas:

(Conjectura "forte", "par" ou "binária", já enunciada antes por Goldbach): *Todo número par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos.*

(Conjectura "fraca", "ímpar" ou "ternária", provada há pouco tempo)[3]: *Todo número ímpar maior que 7 pode ser escrito como a soma de três números primos ímpares.*

No último século muitos trabalhos visando provar a conjectura foram desenvolvidos, sendo alguns com resultados relativamente interessantes. Mesmo que tais avanços ainda sejam insuficientes, essa procura tem, como destaca Sousa (2013, p. 39), "contribuído para o desenvolvimento da própria Teoria dos Números, na medida em que têm surgido outros resultados, menos importantes que a conjectura, mas que podem permitir, quem sabe, prová-la". O autor enfatiza ainda que a investigação da conjectura tem "permitido o desenvolvimento de métodos úteis à Teoria dos Números e a outras áreas da Matemática". Por conta de toda a sua fama, a conjectura de Goldbach já serviu de inspiração para o cinema e para a literatura: no primeiro, destaca-se o filme espanhol, de 2007, "La Habitación de Fermat"; na literatura, destaque para o livro "O tio Petros e a Conjetura de Goldbach", de 1992, do escritor grego Apostolos Doxiadis (1953-).

O que se segue é uma linha do tempo, sintetizada, com importantes resultados oriundos de investigações feitas, a partir do século XX, acerca da Conjectura de Goldbach.

O primeiro resultado surgiu em 1919, quando o matemático norueguês Viggo Brun (1885-1978) demonstrou que qualquer número par suficientemente grande é a soma de dois números, cada um tendo no máximo nove fatores primos.

Em 1923, os matemáticos britânicos Godfrey Harold Hardy (1877-1947) e John Edensor Littlewood (1885-1977) mostraram, assumindo a Hipótese generalizada de Bernhard Riemann (1826-1866), que todo número ímpar suficientemente grande é a soma de três números primos, e quase todos os números pares são a soma de dois primos.

---

[3]Dizemos que ela é "fraca" porque se a "forte" verdadeira, ela é uma implicação imediata.

Com base no resultado de Brun, o russo Lev Schnirelmann (1905-1938), provou, em 1930, que todo o inteiro par igual ou superior a 2 pode ser escrito como a soma de não mais de 20 números primos. Este resultado foi melhorado pelo matemático francês Olivier Ramaré (1965-), que conseguiu reduzir o número máximo de primos para seis.

Sete anos depois, o russo Ivan Vinogradov (1891-1983), obteve um grande resultado: conseguiu remover a dependência na hipótese de Riemann, gerando então a prova incondicional dos resultados de Hardy e Littlewood — mas não conseguiu determinar o que significava "suficientemente grande". Quase 30 anos depois do resultado alcançado por Vinogradov, foi que surgiu um novo avanço, quando, em 1966, o matemático chinês Chen Jingrun (1933-1996), baseado no resultado de Brun, demonstrou que todo número par suficientemente grande é a soma de um número primo e um produto de, no máximo, dois primos — sendo esta considerada uma das tentativas mais bem-sucedidas até hoje.

Em 1975, o matemático norte-americano Hugh Montgomery (1944-) e o britânico Robert Vaughan (1945-) provaram que a quantidade de números pares inferiores ou iguais a um determinado inteiro x, que não podem ser escritos como a soma de dois números primos é no máximo Cx^{1-c}, em que C e c são constantes positivas.

No final da década de 90, mais precisamente em 1997, o matemático francês Jean-Marc Deshouillers (1946-), em parceria com outros três matemáticos, mostrou que a Hipótese de Riemann implica a Conjetura fraca de Goldbach, para todos os números ímpares.

Entre 2012 e 2013, o matemático peruano Harald Helfgott (1977), até então não muito conhecido na comunidade matemática, apresentou, após 7 anos de pesquisa, em um trabalho de 79 páginas, uma demonstração para a conjectura fraca de Goldbach.

É importante ressaltar que, todos esses resultados aqui apresentados são frutos dos avanços alcançados na teoria analítica dos números a partir do século XIX, especialmente no que diz respeito à teoria de Riemann e Dirichlet (1805-1859), na distribuição dos números primos.

Até aqui, conseguimos compreender plenamente os contextos históricos aos quais pertencem os teoremas e a conjectura. Além disso, acreditamos que o leitor tenha

REVISTA ELETRÔNICA AMPLAMENTE
v.1, n.2 abr./ jun. 2022 DOI: 10.47538/RA-2022.V1N2
ISSN: 2965-0003

assimilado os conceitos centrais relativos aos teoremas de incompletude de Gödel bem como do que é a conjectura propriamente dita e dos avanços existentes na tentativa de demonstrá-la.

Após estudarmos os teoremas e a conjectura uma pergunta que surge (ou deveria surgir) naturalmente é: "seria então a conjectura de Goldbach 'indemonstrável'?". Do ponto de vista puramente matemático, não temos, claramente, como afirmar isso ainda. Para conseguirmos responder a essa pergunta, precisaríamos primeiramente definir onde ela seria indecidível: na Aritmética de Peano? Na Axiomática de Zermelo-Fraenkel? Para se chegar a uma resposta desse nível, teríamos que construir um arsenal bem maior de ferramentas, o que incluiria uma apropriação de definições e teoremas mais densos da Lógica e da Teoria dos Números, bem como de resultados de outras áreas da Matemática, como Teoria de Modelos, além de um denso estudo de todos os avanços que se tem até hoje concernentes à própria conjectura. Acreditamos que isso tudo requereria bastante tempo (provavelmente anos) e do empenho de um certo número de matemáticos. Por conta disso tudo, não consideramos plausível ter como um de nossos objetivos obter algo concreto matematicamente.

Por outro lado, e aqui com um olhar também filosófico, podemos afirmar que sim, a possibilidade de os matemáticos não conseguirem provar (ou, pelo menos, refutar) a conjectura de Goldbach é real. Este tipo de hipótese decorre do fato de que os teoremas de Gödel são ferramentas matemáticas consolidadas, e que assim nos permitem pelo menos elaborarmos hipóteses sobre outras teorias.

O próprio Goldbach, inclusive, já nos alertava sobre isso:

> Eu não considero inútil notar também aquelas proposições que são muito prováveis, embora não haja demonstração real, porque mesmo que elas sejam posteriormente consideradas falsas, ainda podem fornecer uma oportunidade para a descoberta de uma nova verdade. (FUSS, 1843, p. 127, tradução nossa).

Ou seja, sem ter um resultado matemático concreto no qual se apoiar, Goldbach, o "dono" da conjectura, de certa forma já hipotetizava sobre a eventual impossibilidade de verificar a validade de sua teoria. E hoje, diferentemente daquela época, temos dois poderosíssimos resultados que servem, no mínimo, como ferramenta para darmos algum tratamento à conjectura, já que parecemos estar bem distantes de chegarmos a alguma conclusão mais sofisticada sobre ela.

A fala de Goldbach também nos leva a refletir sobre algo que já mencionamos: seria a conjectura de fato "sem tanta importância"[4] assim a ponto de os matemáticos não se dedicarem a ela? Segundo ele, temos motivos suficientes pra acreditar que não, uma vez que o estudo dessa conjectura (mesmo que não venha a ser provada), como já até pontuamos, pode contribuir significativamente para a criação e aprimoramento de algumas ferramentas em diferentes áreas da Matemática, as quais poderão ser utilizadas até para resolver outros problemas matemáticos.

Ademais, acreditamos veementemente que este trabalho forneça uma ótima base para outros estudiosos que futuramente possam se interessar pelos assuntos aqui tratados e que estejam decididos a estudá-los com mais robustez. Sugerimos, após a apropriação desses conceitos básicos, o estudo de teoremas já indecidíveis na Aritmética de Peano, a fim de entender como se dá a construção de provas nesse contexto e dessa forma, quem sabe, fazerem observações que possam vir a ser úteis.

Por último, deixamos as seguintes reflexões para o leitor: seria o ser humano capaz de desenvolver absolutamente (todas) as ferramentas necessárias para que finalmente se consiga provar a conjectura? Se sim, de quantos anos mais estamos falando, décadas, séculos, milênios? Até o momento, todas as questões que levantamos aqui são absolutamente válidas, e até que a comunidade matemática nos apresente algo definitivo sobre a conjectura, Gödel é o dono da razão.

REFERÊNCIAS

BATISTELA, Rosemeire de F. **O teorema da incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em Matemática**. Tese (Programa de Pós-graduação em Educação Matemática) – UNESP, Rio Claro, 2017. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/148797/batistela_rf_dr_rcla.pdf?sequence=3&isAllowed=y>. Acesso em: 01 de dez. de 2021.

FUSS, Paul H. **Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle, tome 1**. St. Pétersbourg: L'académie Impériale des Sciences, 1843.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Metodologia do trabalho científico**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1991.

[4]Consideramos importante ressaltar aqui a necessidade de que a conjectura de Goldbach seja mais discutida nos cursos de graduação do nosso país.

REVISTA ELETRÔNICA AMPLAMENTE
v.1, n.2 abr./ jun. 2022 DOI: 10.47538/RA-2022.V1N2
ISSN: 2965-0003

MAROCHI, Marcello Silveira. **Incompletude concreta de sistemas aritméticos**: um estudo sobre Teoremas de Gödel e suas consequências para o ‘fazer matemático’. Monografia (Bacharelado em Matemática) – UFSC, Florianópolis, 2021. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/224905/%28TCC-Marcello%20S.%20Marochi%29%20Incompletude%20concreta%20de%20sistemas%20aritm%C3%A9ticos_%20um%20estudo%20sobre%20os%20Teoremas%20de%20G%C3%B6del%20e%20suas%20consequ%C3%Aancias%20p.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 11 de ago. de 2022.

NETO, Wilson Reis de S. **O Teorema de Paris-Harrington**. Orientador: Nicolau C. Saldanha. 2007. Dissertação (Mestrado em Matemática) – PUC Rio, 2007. Disponível em: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/13399/13399_3.PDF>. Acesso em: 23 de jul. de 2022.

SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat**: a história do enigma que confundiu as mais brilhantes mentes do mundo durante 358 anos. 1. ed. Rio de Janeiro: BestBolso: 2014. Recurso digital.

SOUSA, José Emanuel. **Conjectura de Goldbach:** uma visão aritmética. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores) – Universidade dos Açores, Ponta Delgada, 2013. Disponível em: <https://repositorio.uac.pt/handle/10400.3/2881>. Acesso em: 14 de fev. de 2022.

Data de submissão: 08/05/2022. Data de aceite: 14/05/2022. Data de publicação: 19/05/2022.